Examen VWO

2012

tijdvak 1
woensdag 16 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B (pilot)

Dit examen bestaat uit 15 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 83 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Formules

Goniometrie

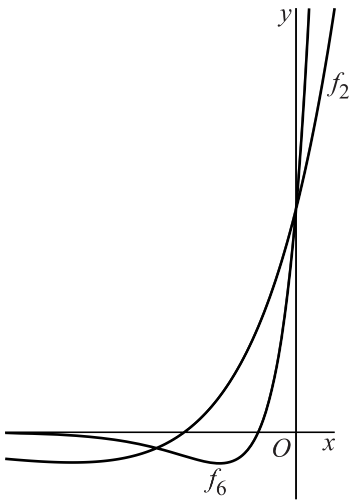
$$\sin(t+u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u$$
$$\sin(t-u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u$$
$$\cos(t+u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u$$
$$\cos(t-u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u$$

$$\sin(2t) = 2\sin t \cos t$$
$$\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$$

Onafhankelijk van a

Voor elke waarde van a ($a > 0$) is een functie f_a gegeven door $f_a(x) = (1 + ax) \cdot e^{ax}$. In figuur 1 zijn de grafieken van f_2 en f_6 weergegeven.

figuur 1

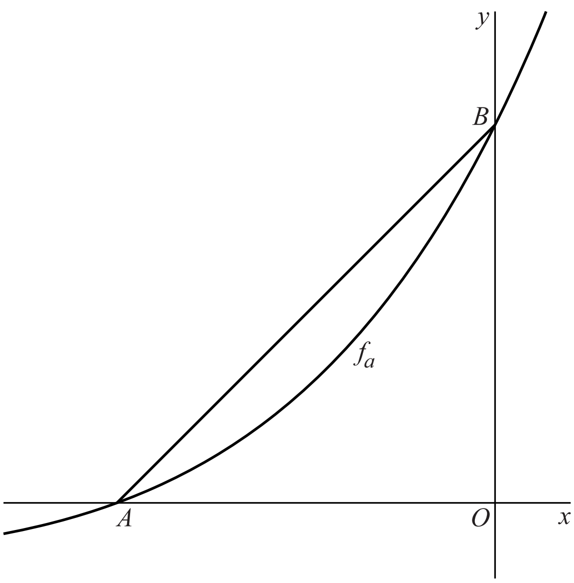


Voor elke waarde van a ($a > 0$) heeft de grafiek van f_a een punt P_a met een horizontale raaklijn.

5p **1** Toon aan dat al deze punten P_a op één lijn liggen.

De grafiek van f_a snijdt de x-as in punt $A(-\frac{1}{a}, 0)$ en de y-as in punt $B(0, 1)$. Zie figuur 2.

figuur 2



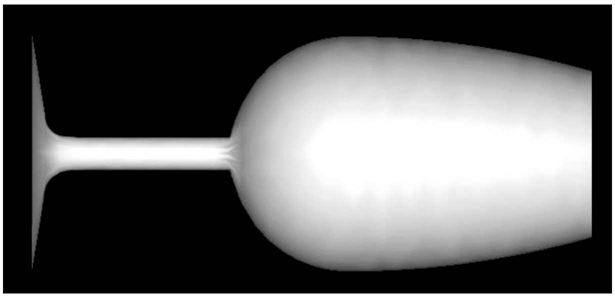
De grafiek van f_a verdeelt driehoek OAB in twee delen.

5p **2** Toon aan dat de verhouding van de oppervlakten van deze twee delen onafhankelijk is van a.

Het standaard proefglas

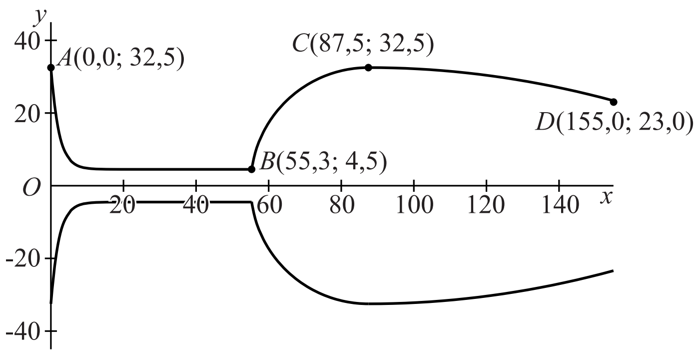
Bij het proeven van wijn kan de vorm van het glas ongewenste effecten geven. Zo zal de wijn er in een breed glas donkerder uitzien dan in een smal glas. De breedte van het glas heeft ook invloed op de geur van de wijn.
Daarom is voor het proeven van wijn een standaard proefglas ontwikkeld: het ISO Standard Wine Tasting Glass.
De eisen die aan dit standaard proefglas worden gesteld, zijn vastgelegd in een ISO-rapport. Aan de hand van de gegevens in dit rapport heeft een technisch tekenaar een model van het standaard proefglas getekend. Een zijaanzicht van dit model zie je in figuur 1.

figuur 1



Om dit model te maken heeft de tekenaar drie wiskundige functies gebruikt. De bijbehorende grafieken beschrijven de buitenkant van het glas. Door deze grafieken om de x-as te wentelen, ontstaat een model van het standaard proefglas. In figuur 2 zijn de drie grafieken en hun spiegelbeelden in de x-as getekend.

figuur 2



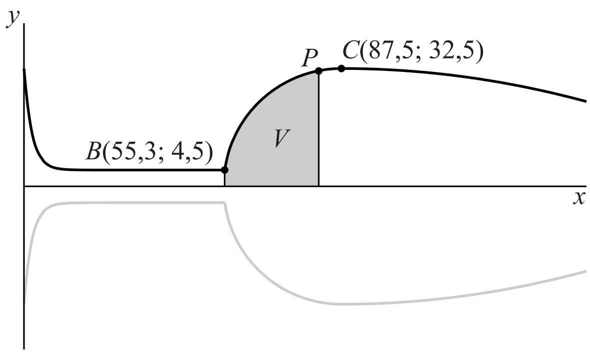
Kromme AB is de grafiek van de functie f met $f(x) = 4,5 + 28,0 \cdot \mathrm{e}^{-0,452x}$ op het domein [0,0; 55,3]; hierbij zijn $f(x)$ en x in mm. Door kromme AB te wentelen om de x-as ontstaan de buitenkant van de voet en de steel van het wijnglas. De voet en de steel zijn massief.

4p **3** Bereken het volume van de voet en de steel samen. Rond je antwoord af op een geheel aantal cm^3.

Om CD te tekenen wordt een bergparabool gebruikt met C als top.

5p **4** Stel een formule op voor kromme CD.

figuur 3



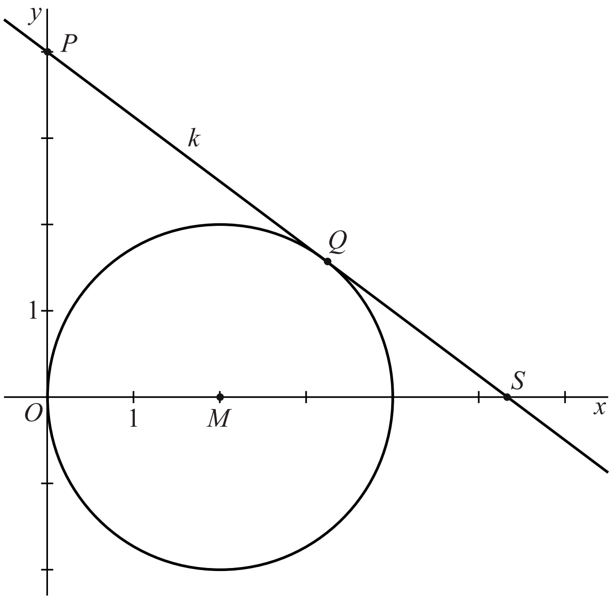
In figuur 3 zijn opnieuw de drie grafieken en hun spiegelbeelden in de x-as getekend.
Voor het proeven van wijn wordt een glas bij voorkeur met 50 ml wijn gevuld. Daarom wil de tekenaar in figuur 3 het punt aangeven tot waar het standaard proefglas gevuld moet worden om 50 ml wijn te bevatten. Dit punt P ligt op kromme BC.
Kromme BC is de grafiek van de functie g met $g(x) = \sqrt{-x^2 + 175x - 6600}$ op het domein [55,3; 87,5]; hierbij zijn $g(x)$ en x in mm.
In figuur 3 is het vlakdeel V grijs gemaakt dat wordt begrensd door de verticale lijnen door B en door P, de x-as en kromme BP.

Als V wordt gewenteld om de x-as, heeft het omwentelingslichaam dus een inhoud die overeenkomt met 50 ml. Hierbij wordt de dikte van het glas verwaarloosd.

6p **5** Bereken met behulp van primitiveren de x-coördinaat van P. Rond je antwoord af op een geheel getal.

Gegeven is de cirkel met middelpunt $M(2, 0)$ en straal 2.
De niet-verticale lijn k gaat door het punt $P(0, 4)$, raakt de cirkel in het punt Q en snijdt de positieve x-as in het punt S. Zie figuur 1.

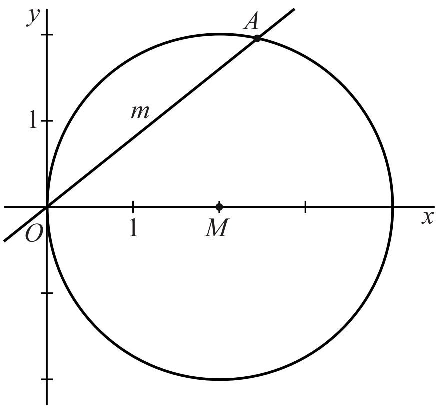
figuur 1



6p **6** Bereken exact de x-coördinaat van S.

De lijn m met vergelijking $y = px$ met $p > 0$ snijdt de cirkel behalve in O in een punt A, zodanig dat $OA = 3$. Zie figuur 2.

figuur 2

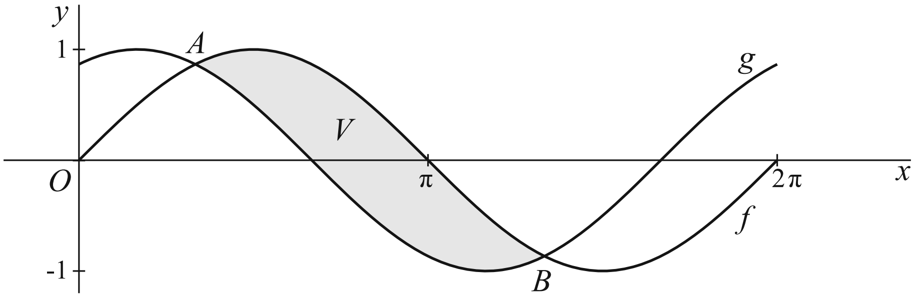


8p **7** Bereken exact de waarde van p.

Tussen twee sinusgrafieken

De functies f en g zijn gegeven door $f(x)=\sin x$ en $g(x)=\sin(x+\frac{1}{3}\pi)$.
In figuur 1 zijn de grafieken van f en g getekend op het domein $[0, 2\pi]$.
De grafieken van f en g snijden elkaar op dit domein bij $x=\frac{1}{3}\pi$ in het punt A en bij $x=\frac{4}{3}\pi$ in het punt B. Zie figuur 1.

figuur 1

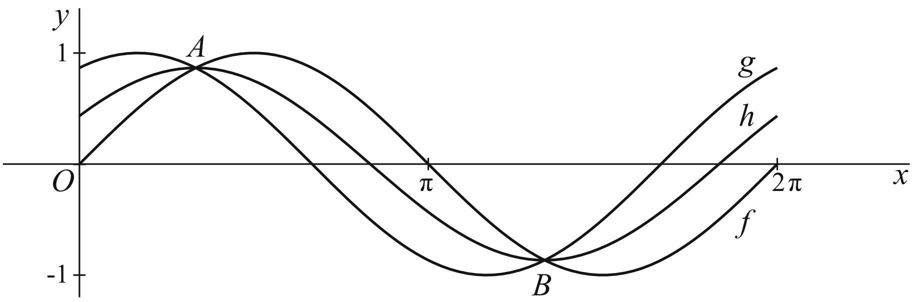


V is het vlakdeel dat tussen A en B wordt ingesloten door de grafieken van f en g.

4p **8** Bereken met behulp van primitiveren de oppervlakte van V.

De functie h is gegeven door $h(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(f(x)+g(x)\right)$. In figuur 2 zijn de grafieken van f, g en h getekend op het domein $[0, 2\pi]$.

figuur 2

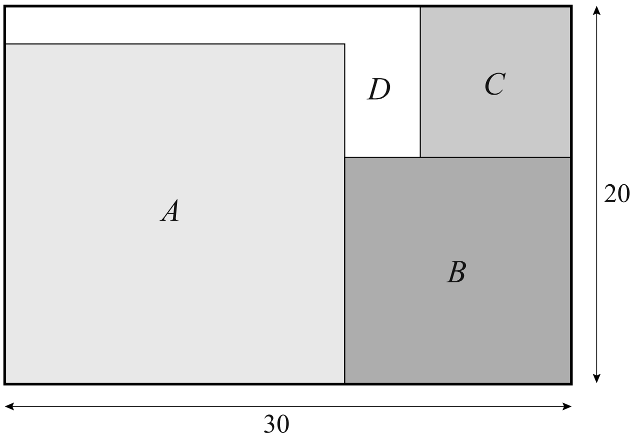


4p **9** Bereken exacte waarden van a en b zo dat $\frac{1}{2}\cdot\left(f(x)+g(x)\right)$ te herleiden is tot $a\cdot\sin(x+b)$.

Drie vierkanten in een rechthoek

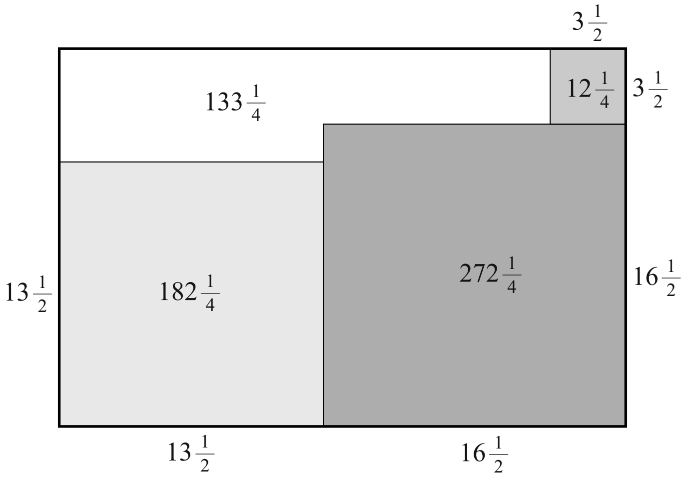
In een rechthoek van 20 bij 30 liggen drie vierkanten: A linksonder, B rechtsonder en C rechtsboven. Van elk vierkant valt een van de hoekpunten samen met een van de hoekpunten van de rechthoek. A en B liggen tegen elkaar aan, en B en C ook. Het deel van de rechthoek dat niet bedekt is door de vierkanten noemen we D. Zie figuur 1.

figuur 1



Als de lengte van de zijde van vierkant A gekozen is, liggen de afmetingen van de delen B, C en D vast.
In figuur 2 is, bij een keuze van $13\frac{1}{2}$ voor de zijde van vierkant A, van elk deel de oppervlakte aangegeven.

figuur 2



Er is een lengte van de zijde van vierkant A waarvoor de oppervlakte van D maximaal is.

9p **10** Bereken exact deze lengte.

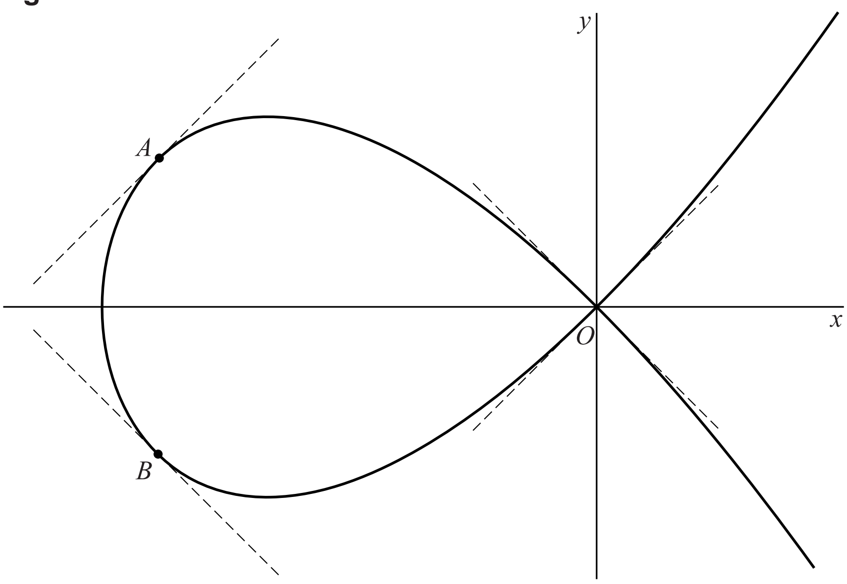
Lus

Een punt beweegt in het Oxy-vlak volgens de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 1 \\ y(t) = t(t^2 - 1) \end{cases}$$

Hierin is t de tijd.
De baan van het punt heeft de vorm van een lus. Het punt bevindt zich op de tijdstippen $t = -1$ en $t = 1$ in de oorsprong O. In O heeft de baan van het punt twee raaklijnen.
Het bewegende punt passeert achtereenvolgens twee punten A en B waar de raaklijn aan de baan evenwijdig is met één van de raaklijnen in O.
Zie de figuur.

figuur



De benodigde tijd om van O naar A te bewegen, de benodigde tijd om van A naar B te bewegen en de benodigde tijd om van B naar O te bewegen, zijn alle drie even lang.

6p **11** Toon dit aan.

Lijn door perforatie

De functie f_b wordt gegeven door: $f_b(x) = \dfrac{x - b}{x^2 - b^2}$ met $x \neq -b$ en $x \neq b$.

Voor elke waarde van $b \neq 0$ heeft de grafiek van f_b een perforatie.

7p **12** Bereken exact de waarde(n) van b waarvoor deze perforatie op de lijn met vergelijking $y = 4x + 1$ ligt.

Verschoven platen

Op de foto's hieronder zie je een kunstwerk van de Friese kunstenaar Ids Willemsma bij het voormalige Arbeidsbureau in Heerenveen.

foto 1

foto 2

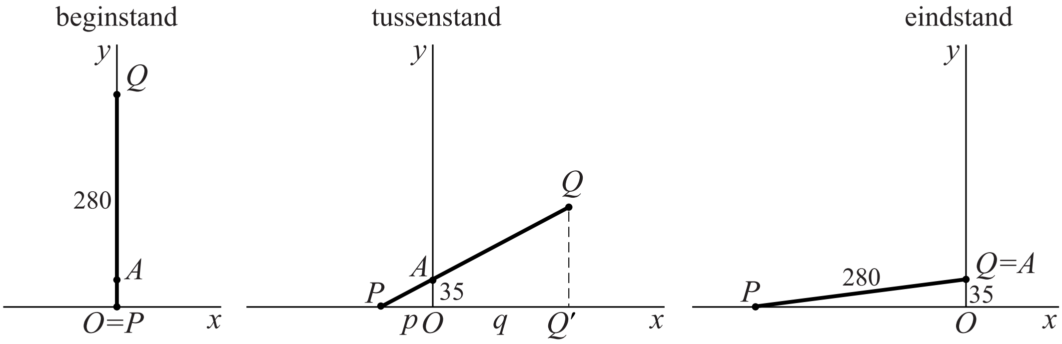
Het kunstwerk bestaat uit een aantal naast elkaar geplaatste ijzeren platen van gelijke lengte. De voorste plaat op foto 2 staat verticaal op de grond tegen een muurtje. De stand van de volgende platen is ontstaan door zo'n plaat eerst verticaal tegen het muurtje te plaatsen en daarna de onderkant over de grond te verschuiven in de richting loodrecht op het muurtje. De platen steunen steeds op de bovenkant van het muurtje.

Om te voorkomen dat voorbijgangers zich stoten aan het kunstwerk, willen we weten hoe ver de bovenkant van een verschoven plaat maximaal in horizontale richting kan uitsteken.

In deze opgave kijken we naar een model met één plaat met lengte 280 cm die steeds schuiner tegen een muurtje met hoogte 35 cm komt te staan.
In dit model wordt de plaat voorgesteld door een lijnstuk PQ. Zie de figuur op de volgende bladzijde.
Het punt waar PQ op de bovenrand van het muurtje steunt, noemen we A.
We brengen een assenstelsel aan met de x-as horizontaal door P en de y-as verticaal door A. Langs beide assen nemen we als eenheid 1 cm. De coördinaten van A zijn dus $(0, 35)$.

In de verticale beginstand van PQ bevindt punt P zich in de oorsprong en is Q het punt $(0, 280)$. Punt P wordt over de x-as naar links geschoven, terwijl lijnstuk PQ door punt A blijft gaan. In de figuur zijn de beginstand, een tussenstand en de eindstand van lijnstuk PQ getekend.

figuur



De loodrechte projectie van Q op de x-as noemen we Q'.
De afstand van P tot de oorsprong noemen we p en de afstand van Q' tot de oorsprong noemen we q. Zie de figuur.

Uitgaande van de getekende tussenstand kan q, met behulp van gelijke verhoudingen in gelijkvormige driehoeken, als volgt worden uitgedrukt in p:

$$q = \frac{280p}{\sqrt{p^2 + 1225}} - p$$

4p **13** Toon aan dat deze formule juist is.

Als we q beschouwen als functie van p, dan geldt voor de afgeleide:

$$q'(p) = \frac{343\,000}{(p^2 + 1225) \cdot \sqrt{p^2 + 1225}} - 1$$

4p **14** Toon dit aan.

6p **15** Bereken exact het maximum van q.